

ЗАДАНИЕ

для самостоятельной работы по функциональному анализу

5-й семестр 2002-2003 уч. года)

Предлагаемое задание состоит из задач и упражнений, умение решать которые играет определяющую роль в изучении функционального анализа. Это задание (с точностью до числовых параметров) включает в себя все экзаменационные задачи. Часть задач является фрагментами утверждений лекционного курса, остальные дополняют или конкретизируют эти утверждения.

1. Мультиметрические пространства.

1. Для подмножеств A и B топологического пространства доказать равенства

$$\text{int}(A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int } B, \quad \text{cl}(A \cup B) = \text{cl } A \cup \text{cl } B.$$

Как связаны между собой множества $\text{int}(A \cup B)$ и $\text{int } A \cup \text{int } B$, $\text{cl}(A \cap B)$ и $\text{cl } A \cap \text{cl } B$?

2. Отображение $c : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ называется *оператором замыкания* на множестве X , если $c(\emptyset) = \emptyset$ и $A \subset c(A)$, $c(c(A)) = c(A)$, $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$ для любых $A, B \subset X$. Доказать, что если c — оператор замыкания на множестве X , то существует единственная топология на X , в которой замыкание любого множества $A \subset X$ совпадает с $c(A)$.

3. Доказать, что подмножество топологического пространства всюду плотно тогда и только тогда, когда его пересечение с любым непустым открытым множеством не пусто.

4. На числовой прямой построить слабейшие топологии, содержащие следующие множества:

а) $\beta_1 = \{(a, b]; a, b \in \mathbb{R}\}$; б) $\beta_2 = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$; в) $\beta_3 = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

5. Найти внутренние, внешние, граничные, изолированные и предельные точки множества $(0, 1) \cup \{2\}$ в топологиях из задачи 4.

6. Какие аксиомы отделимости выполнены в топологических пространствах из задачи 4?

7. Построить три различных открытых множества на прямой, имеющих общую границу. Каково наибольшее количество таких множеств? Каково наибольшее количество непересекающихся открытых множества на прямой, имеющих общую границу?

8. Доказать, что подмножество топологического пространства открыто тогда и только тогда, когда оно является окрестностью каждой своей точки.

9. Привести пример множества $A \subset \mathbb{R}$ такого, что множества

$$A, \quad \text{int } A, \quad \text{cl } A, \quad \text{int}(\text{cl } A), \quad \text{cl}(\text{int } A), \quad \text{cl}(\text{int}(\text{cl } A)), \quad \text{int}(\text{cl}(\text{int } A))$$

попарно различны.

10. Какое наибольшее число попарно различных множеств можно получить из подмножества топологического пространства, последовательно применяя к нему операции замыкания и внутренности.

11. Доказать, что подмножество A подпространства X_0 топологического пространства X замкнуто тогда и только тогда, когда $A = B \cap X_0$ для некоторого замкнутого подмножества B пространства X .

12. Доказать, что всякое топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, удовлетворяет и первой аксиоме счетности. Привести пример, когда обратное утверждение не верно.

13. Доказать, что каждое топологическое пространство, удовлетворяющее 2-й аксиоме счетности, сепарабельно.

14. Привести пример сепарабельного топологического пространства, не удовлетворяющего 2-й аксиоме счетности.

15. Привести пример сепарабельного топологического пространства, имеющего несепарабельное подпространство.

16. Доказать, что для хаусдорфовости топологического пространства X , необходимо и достаточно, чтобы любая сходящаяся направленность в X имела единственный предел.

17. Доказать, что для топологического пространства X следующие утверждения равносильны:

- а) X – T_3 -пространство;
- б) фильтр окрестностей любой точки в X имеет базис, состоящий из замкнутых окрестностей;
- в) каждое замкнутое подмножество X совпадает с пересечением всех своих замкнутых окрестностей.

18. Привести пример T_3 -пространства, не являющегося T_1 -пространством.

19. Какие из свойств отделимости наследуются подпространствами топологического пространства?

20. Доказать, что если X и Y – топологические пространства, то для непрерывности отображения $f: X \rightarrow Y$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall x \in X \quad (x_j \rightarrow x \Rightarrow f(x_j) \rightarrow f(x))$. Доказать, что если X удовлетворяет 1-й аксиоме счетности, то непрерывность отображения f равносильна его секвенциальной непрерывности.

21. Привести пример непрерывной биекции, не являющейся гомеоморфизмом.

22. Проверить, являются ли непрерывными в точке $x = 0$ следующие функции, рассматриваемые как отображения пространства \mathbb{R} с топологией, базой которой являются полуинтервалы, открытые справа, в пространство \mathbb{R} с естественной топологией:

- 1) $f(x) = \operatorname{sign} x$; 2) $g(x) = [x]$.

23. Проверить, являются ли непрерывными в точке $x = 0$ следующие функции, рассматриваемые как отображения пространства \mathbb{R} с естественной топологией в пространство \mathbb{R} с топологией, базой которой являются полупрямые вида $(a, +\infty)$:

- 1) $f(x) = \begin{cases} x^{-1}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 2) $g(x) = \begin{cases} |x|^{-1}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

24. Доказать, что если отображение f топологического пространства X на топологическое пространство Y непрерывно, то для всякого плотного в X множества A множество $f(A)$ плотно в Y .

25. Пусть $X = Y = \mathbb{R}$, в Y топология естественная. На X построить слабейшую топологию, при которой непрерывно отображение:

- а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = \operatorname{sign} x$; в) $f(x) = \sin x$.

26. Пусть $X = Y = \mathbb{R}$, в X топология естественная. На Y построить сильнейшую топологию, при которой непрерывно отображение:

- а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = \operatorname{sign} x$; в) $f(x) = \sin x$.

27. Построить фактор-пространство пространства \mathbb{R} с естественной топологией по отношению эквивалентности: $x \sim y \Leftrightarrow x \Leftrightarrow y \in \mathbb{Q}$.

28. Совокупность \mathfrak{A} подмножеств множества X называется *покрытием* множества $A \subset X$, если $\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A \supset A$. Покрытие \mathfrak{A} топологического пространства X называется *фундаментальным*, если для любого подмножества $A \subset X$ его открытость равносильна открытости $A \cap V$ в V для каждого $V \in \mathfrak{A}$.

Доказать, что каждое открытое покрытие топологического пространства (т.е. покрытие, состоящее из открытых множеств) фундаментально.

29. Покрытие \mathfrak{A} топологического пространства X фундаментально тогда и только тогда, когда для любого подмножества $B \subset X$ его замкнутость равносильна замкнутости $B \cap V$ в V для каждого $V \in \mathfrak{A}$.

30. Покрытие топологического пространства называется *локально конечным*, если любая его точка имеет окрестность, пересекающуюся только с конечным числом элементов покрытия.

Доказать, что каждое локально конечное (и, в частности, конечное) замкнутое покрытие фундаментально.

31. Доказать, что если X и Y — топологические пространства, \mathfrak{A} — фундаментальное покрытие X и для любого $V \in \mathfrak{A}$ отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно на V , (т.е. непрерывно сужение $f|_V : V \rightarrow Y$), то $f : X \rightarrow Y$ непрерывно.

32. Исследовать на (би)компактность в топологиях из задачи 4 множество $(0, 1] \cup \{2\}$.

33. Доказать теорему Вейерштрасса: Каждая непрерывная вещественная функция на бикompактном множестве ограничена и принимает свои наибольшее и наименьшее значения.

34. Подмножество топологического пространства называется *относительно компактным*, если его замыкание компактно. Подмножество E топологического пространства X называется (*относительно*) *секвенциально компактным*, если любая последовательность в E содержит подпоследовательность, сходящуюся в E (в X). Множество $E \subset X$ (*относительно*) *счетно компактно*, если любая его последовательность имеет предельную точку в E (в X).

Доказать, что если множество бикompактно или секвенциально компактно, то оно счетно компактно. Следует иметь ввиду, что бикompактность и секвенциальная компактность не следуют одна из другой.

35. Доказать, что если бикompактная топология мажорирует хаусдорфову, то она совпадает с последней.

36. Пусть X — непустое множество и отображение $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

$$\forall x, y, z \in X \quad d(x, x) = 0; \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y).$$

Доказать, что d — полуметрика на X .

37. Доказать, что если (X, d) — полуметрическое пространство, то

- 1) $\forall x \in X, R > r > 0 \quad B_r[x] \subset B_R(x)$;
- 2) $\forall x \in X, r > 0 \quad \text{cl } B_r(x) \subset B_r[x]$, а вот равенства может не быть;
- 3) $\forall x \in X, r > 0 \quad B_r(x) \in \text{Op}(X, d), B_r[x] \in \text{Cl}(X, d)$;
- 4) шар большего радиуса может быть собственным подмножеством шара меньшего радиуса.

38. Доказать, что если d — полуметрика на X , то

- 1) $\forall x, y \in X \quad d(x, y) \geq 0$;
- 2) $\forall x_1, x_2, y \in X \quad |d(x_1, y) \Leftrightarrow d(x_2, y)| \leq d(x_1, x_2)$;
- 3) $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in X \quad |d(x_1, y_1) \Leftrightarrow d(x_2, y_2)| \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)$;
- 4) $\forall x_1, x_2 \in X, A \subset X \quad |d(x_1, A) \Leftrightarrow d(x_2, A)| \leq d(x_1, x_2)$,

где $d(x, A) := \text{dist}(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$ — расстояние между точкой x и множеством A .

39. Доказать, что если d_1, \dots, d_n — полуметрики на множестве X , то для любых $x \in X$ и $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n > 0$ справедливы равенства

$$\bigcap_{k=1}^n B_{\epsilon_k}^{d_k}(x) = B_{\epsilon}^d(x) \quad \text{и} \quad \bigcap_{k=1}^n B_{\epsilon_k}^d(x) = B_{\epsilon}^d(x)$$

где $d := \max_{1 \leq k \leq n} d_k$ и $\epsilon := \min_{1 \leq k \leq n} \epsilon_k$. Аналогичное равенство справедливо и для замкнутых шаров.

40. Доказать, что если $x_n \rightarrow x$ в полуметрическом пространстве (X, d) , то существует такая последовательность $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$, что $\lambda_n \nearrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, а $\lambda_n \cdot d(x_n, x) \rightarrow 0$.

41. Доказать, что если (X, D) — мултиметрическое пространство, то для любой полуметрики $d \in D$ и любого множества $A \subset X$ равномерно непрерывны отображения

$$d : X^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{и} \quad X \ni x \mapsto d(x, A) \in \mathbb{R}.$$

42. Доказать, что полуметрическое пространство удовлетворяет 2-й аксиоме счетности тогда и только тогда, когда оно сепарабельно.

43. Доказать, что если шар радиуса 7 содержится в шаре радиуса 3, то они совпадают.

44. Доказать, что если на компактном топологическом пространстве существует последовательность непрерывных вещественных функций, разделяющая точки, то это пространство метризуемо.

45. Привести пример метрического пространства (X, d) и таких его замкнутых подмножеств A и B , что

$$d(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y) = 0, \quad A \cap B = \emptyset.$$

46. Пусть метрическое пространство (X, d) ограничено, т.е. $\text{diam } X := \sup_{x, y \in X} d(x, y) < +\infty$. Доказать, что функция

$$d_H(A, B) := \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right\}$$

на $\mathcal{C}l X$ является метрикой (она называется метрикой Хаусдорфа).

47. Пусть d — полуметрика на множестве X . Доказать, что функции

$$d_1(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad d_2(x, y) := \min\{1, d(x, y)\}, \quad d_3(x, y) := \ln(1 + d(x, y))$$

являются полуметриками на X , причем все они эквивалентны и являются метриками или нет, одновременно с исходной.

48. Доказать, что функции

$$d(x, y) := |x \Leftrightarrow y|, \quad d_1(x, y) := |x^3 \Leftrightarrow y^3|, \quad d_2(x, y) := |e^x \Leftrightarrow e^y|, \quad d_3(x, y) := |\arctg x \Leftrightarrow \arctg y|$$

являются метриками на \mathbb{R} , причем все они порождают одну и ту же топологию. А будут ли эти метрики эквивалентны? Относительно каких из этих метрик пространство \mathbb{R} полно?

49. Можно ли утверждать, что две полуметрики на множестве эквивалентны тогда и только тогда, когда направленности Коши в этих полуметриках одни и те же?

50. Доказать, что если d_1 и d_2 — полуметрики на множестве X , то функции

$$d_3 := d_1 + d_2, \quad d_4 := \max\{d_1, d_2\}, \quad d_5 := \alpha \cdot d_1 \quad (\alpha > 0)$$

также являются полуметриками на X , причем d_3 и d_4 , d_1 и d_5 попарно эквивалентны.

51. Доказать, что функция

$$d(m, n) := \begin{cases} 0 & \text{при } m = n, \\ 1 + \frac{1}{m+n} & \text{при } m \neq n, \end{cases}$$

является метрикой на \mathbb{N} , относительно которой множество натуральных чисел полно. Построить в \mathbb{N} последовательность замкнутых, вложенных друг в друга шаров, имеющих пустое пересечение.

52. Доказать, что секвенциально полное подмножество полуметрического пространства полно.

53. Доказать интегральные неравенства Гельдера и Минковского.

54. Доказать полноту пространств:

$$\mathbb{K}^n \ (n \in \mathbb{N}), \quad s \equiv \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \quad l^p \ (0 < p < +\infty), \quad m \equiv l^\infty, \quad c, \quad c_0,$$

$$C[a, b], \quad C^1[a, b], \quad \mathcal{L}^p(S, \mu), \quad L^p(S, \mu) \ (0 < p \leq +\infty).$$

55. Доказать включения:

$$l^p \subset l^q \subset c_0 \subset c \subset l^\infty \subset s \quad (0 < p < q < +\infty),$$

$$L^q(S, \mu) \subset L^p(S, \mu) \quad (0 < p < q \leq +\infty, \quad \mu(S) < +\infty).$$

Привести примеры, подтверждающие строгость этих включений. Являются ли указанные вложения непрерывными?

56. Какие из пространств

$$\mathbb{K}^n, \quad s, \quad c, \quad c_0, \quad l^p \ (0 < p \leq +\infty), \quad C[0, 1], \quad C^1[0, 1], \quad L^p(0, 1) \ (0 < p \leq +\infty)$$

являются сепарабельными?

57. Множество $C[a, b]$, наделенное метрикой

$$d_p(x, y) := \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

обозначается $CL^p[a, b]$. Доказать, что пространство $CL^p[a, b]$ не является полным. Указать какое-либо пополнение этого пространства. Ответ обосновать.

58. Доказать, что если некоторая итерация отображения полного метрического пространства в себя является сжимающим отображением, то исходное отображение имеет, и при том только одну, неподвижную точку.

59. Доказать, что если (X, d) — компактное метрическое пространство, а отображение $f : X \rightarrow X$ таково, что

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

то f имеет, и при том только одну, неподвижную точку.

60. Пусть $a \in [0, 1]$. Пользуясь предыдущим утверждением, доказать, что последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, где

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = x_n \oplus \frac{1}{2}(x_n^2 \oplus a) \quad (n \in \overline{\mathbb{N}}),$$

сходится к \sqrt{a} . Останется ли утверждение верным, если $a > 1$?

61. Решить интегральные уравнения:

$$x(t) = \lambda \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds + t^2, \quad x(t) = \lambda \int_0^1 t^m s^n x(s) ds + t^k.$$

62. Решить интегральные уравнения:

$$x(t) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(t+s) x(s) ds + 2 \sin t, \quad x(t) = \int_0^t e^{t-s} x(s) ds + t + 1.$$

63. Сведением к дифференциальному уравнению решить уравнение Вольтерра 1-го рода

$$\int_0^t \cos(t \Leftrightarrow s) x(s) ds = \operatorname{sh} t.$$

64. Исследовать на (относительную) компактность в $C[0, 1]$ множество

- а) $\{x \in C^1[0, 1] : \forall t \in [0, 1] \ |x(t)| \leq A, \ |x'(t)| \leq B\};$
 б) $\{x \in C^2[0, 1] : \forall t \in [0, 1] \ |x(t)| \leq A, \ |x'(t)| \leq B, \ |x''(t)| \leq C\},$

где $A, B, C \geq 0$ — некоторые константы.

65. Исследовать на (относительную) компактность в $C[0, 1]$ множества

- а) $\{x \in C^2[0, 1] : \forall t \in [0, 1] \ |x(t)| \leq A, \ |x''(t)| \leq B\};$
 б) $\{x \in C[0, 1] : \forall t, t_1, t_2 \in [0, 1] \ |x(t)| \leq A, \ |x(t_1) \Leftrightarrow x(t_2)| \leq B \cdot |t_1 \Leftrightarrow t_2|\},$

где $A \geq 0$ и $B \geq 0$ — некоторые константы.

66. Пусть $A \subset C[0, 1]$ равномерно ограничено. Исследовать на (относительную) компактность в $C[0, 1]$ множество

$$B = \{y \mid \exists x \in A : y(t) = \int_0^t x(s) ds, \ t \in [0, 1]\}.$$

67. Исследовать на (относительную) компактность в $C[0, 1]$ множество всех функций $x \in C^1[0, 1]$ таких, что

$$|x(0)| \leq A, \quad \int_0^1 |x'(t)|^2 dt \leq B$$

($A \geq 0, \ B > 0$ — константы).

68. Исследовать на (относительную) компактность в $C[0, 1]$ множество $A = \{x_j \mid j \in J\}$, где

- | | | | |
|-------------------------|-----------------------|---------------------------------------|-------------------------|
| 1) $x_j(t) = t^j$ | ($J = \mathbb{N}$); | 5) $x_j(t) = \sin jt$ | ($J = \mathbb{R}$); |
| 2) $x_j(t) = (at)^j$ | ($J = \mathbb{N}$); | 6) $x_j(t) = \sin jt$ | ($J = [1, 2]$); |
| 3) $x_j(t) = \sin jt$ | ($J = \mathbb{N}$); | 7) $x_j(t) = \operatorname{arctg} jt$ | ($J = \mathbb{R}$); |
| 4) $x_j(t) = \sin(j+t)$ | ($J = \mathbb{N}$); | 8) $x_j(t) = e^{t-j}$ | ($J = \mathbb{R}_+$). |

69. В зависимости от числовой последовательности $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ исследовать на (относительную) компактность в пространстве $X = l^p$ ($0 < p < +\infty$) множества

$$A = \left\{ x \in X \mid \forall n \in \mathbb{N} \ |x_n| \leq c_n \right\}, \quad B = \left\{ x \in X \mid \sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n|^p \leq 1 \right\},$$

$$C = \left\{ x \in X \mid \sum_{n=1}^{\infty} (|c_n| + |x_n|)^p \leq 1 \right\}.$$

70. Доказать, что подмножество $A \subset c_0$ относительно компактно тогда и только тогда, когда

- 1) A «равномерно» ограничено, т.е. $\sup_{x \in A} \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty$,
- 2) A «равностепенно сходится к нулю», т.е. $\sup_{x \in A} \sup_{k \geq n} |x_k| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

71. Доказать, что подмножество $A \subset c$ относительно компактно тогда и только тогда, когда

- 1) A «равномерно» ограничено, т.е. $\sup_{x \in A} \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty$,
- 2) A «равностепенно сходится», т.е. $\sup_{x \in A} \sup_{k, m \geq n} |x_k - x_m| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

72. В зависимости от числовой последовательности $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и параметра $0 < p < +\infty$ исследовать на (относительную) компактность в пространстве $X \in \{c_0, c, s\}$ множества из задачи 69.

73. В каких из пространств: l^p ($0 < p < +\infty$), c_0, c, s содержится множество

$$A = \left\{ \left\{ \frac{k}{k^2 + n^2} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \mid n \in \mathbb{N} \right\}?$$

Исследовать его на (относительную) компактность в соответствующих пространствах.

74. Исследовать на (относительную) компактность в $L^2(0, 1)$ множества:

$$A = \{ \sin nt \mid n \in \mathbb{N} \}, \quad B = \{ (\ln t)^n \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

2. Топологические векторные пространства.

75. Доказать, что сумма двух уравновешенных подмножеств векторного пространства уравновешена. А будет ли выпукла сумма двух выпуклых множеств.

76. Доказать, что если V — выпуклое подмножество векторного пространства, то для любых $\alpha, \beta \geq 0$ справедливо равенство $\alpha \cdot V + \beta \cdot V = (\alpha + \beta)V$.

77. Доказать, что подмножество векторного пространства абсолютно выпукло тогда и только тогда, когда оно выпукло и уравновешено.

78. Является ли пересечение произвольного семейства выпуклых (уравновешенных, абсолютно выпуклых) множеств выпуклым (соотв., уравновешенным, абсолютно выпуклым) множеством? А объединение?

79. Доказать, что для любого подмножества A векторного пространства его выпуклая оболочка имеет вид

$$\text{co } A = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \mid n \in \mathbb{N}, x_k \in A, \lambda_k \geq 0, 1 \leq k \leq n, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \right\}.$$

80. Доказать, что для любого подмножества A векторного пространства его абсолютно выпуклая оболочка имеет вид

$$\text{abs co } A = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \mid n \in \mathbb{N}, x_k \in A, \lambda_k \in \mathbb{K}, 1 \leq k \leq n, \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leq 1 \right\}.$$

81. Являются ли линейными на векторном пространстве дискретная и антидискретная топологии.

82. Доказать, что в ТВП сумма двух бикомпактных подмножеств бикомпактна.

83. Доказать, что в ТВП сумма бикомпактного и замкнутого множеств замкнута.

84. Доказать, что в ТВП сумма двух замкнутых множеств может не быть замкнутым множеством.

85. Доказать, что в каждом (локально выпуклом) ТВП существует база окрестностей нуля, состоящая из замкнутых (выпуклых) уравновешенных множеств.

86. Доказать, что базисные окрестности

$$V_r(x) = \{ y \in C(\mathbb{R}) : \sup_{t \in \mathbb{R}} |y(t) - x(t)| < r \} \quad (r > 0)$$

функций $x \in C(\mathbb{R})$ задают на $C(\mathbb{R})$ топологию. Исследовать эту топологию на линейность. Является ли она метризуемой? Если да, то полно ли пространство $C(\mathbb{R})$ в этой метрике?

87. Доказать, что базисные окрестности

$$V_{K,r}(x) = \{ y \in C(\mathbb{R}) : \sup_{t \in K} |y(t) - x(t)| < r \}$$

($r > 0$, K пробегает конечные множества в \mathbb{R}) функций $x \in C(\mathbb{R})$ задают на $C(\mathbb{R})$ топологию. Исследовать эту топологию на линейность. Является ли она метризуемой? Если да, то полно ли пространство $C(\mathbb{R})$ в этой метрике?

88. Доказать, что базисные окрестности

$$V_{K,r}(x) = \{ y \in C(\mathbb{R}) : \sup_{t \in K} |y(t) - x(t)| < r \}$$

($r > 0$, K пробегает компактные множества в \mathbb{R}) функций $x \in C(\mathbb{R})$ задают на $C(\mathbb{R})$ топологию. Исследовать эту топологию на линейность. Является ли она метризуемой? Если да, то полно ли пространство $C(\mathbb{R})$ в этой метрике?

89. Сравнить на $C(\mathbb{R})$ топологии из трех предыдущих задач, сравнить метрики, которые их порождают (если таковые имеются).

90. Доказать, что множество в ТВП ограничено тогда и только тогда, когда ограничено каждое его счетное подмножество.

91. Доказать, что в ТВП каждое вполне ограниченное множество ограничено.

92. Функционалом Минковского поглощающего множества V в векторном пространстве X называется отображение

$$\mu_V : X \ni x \mapsto \mu_V(x) := \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda V\}.$$

Доказать, что

$$\mu_V(x) := \frac{1}{\sup\{\lambda > 0 \mid \lambda x \in V\}}, \quad x \in X.$$

Доказать, что если V_1 и V_2 — поглощающие множества в X , то

$$V_1 \subset V_2 \Rightarrow \mu_{V_1} \geq \mu_{V_2}, \quad \mu_{V_1} > \mu_{V_2} \Rightarrow V_1 \subset V_2.$$

93. Доказать, что если множество V является поглощающим, то $V \subset \{\mu_V \leq 1\}$, а если оно еще и уравновешено, то

$$\{\mu_V < 1\} \subset V \subset \{\mu_V \leq 1\}.$$

Привести пример поглощающего множества, для которого левое включение не верно.

94. Доказать, что функционал Минковского любого абсолютно выпуклого поглощающего множества V в векторном пространстве X является полунормой на X .

95. Доказать, что любая полунорма p на векторном пространстве X является функционалом Минковского любого абсолютно выпуклого множества $V \subset X$ такого, что

$$\{p < 1\} \subset V \subset \{p \leq 1\}.$$

96. Доказать, что пространства l^p и $\mathcal{L}^p(0, 1)$ ($0 < p < 1$) являются локально ограниченными ТВП, но не являются локально выпуклыми пространствами.

97. Пусть Ω — область в \mathbb{R}^n . Доказать, что функции

$$p_K(x) = \sup_{\substack{|\alpha| \leq m \\ t \in K}} |\partial^\alpha x(t)| \quad (K \text{ пробегает компакты в } \Omega)$$

являются полунормами на векторном пространстве $C^m(\Omega)$ всех m -раз непрерывно дифференцируемых в области Ω функций. Пространство $C^m(\Omega)$, наделенное мультинормой, состоящей из указанных полунорм обозначается $\mathcal{E}^m(\Omega)$. Его подпространство, состоящее из функций, носители которых содержатся в компакте $K \subset \Omega$, обозначается $\mathcal{D}_K^m(\Omega)$.

98. Пусть Ω — область в \mathbb{R}^n . Доказать, что функции

$$p_{K,m}(x) = \sup_{\substack{|\alpha| \leq m \\ t \in K}} |\partial^\alpha x(t)| \quad (K \text{ пробегает компакты в } \Omega, \quad m \in \overline{\mathbb{N}})$$

являются полунормами на векторном пространстве $C^\infty(\Omega)$ всех бесконечно дифференцируемых в области Ω функций. Пространство $C^\infty(\Omega)$, наделенное мультинормой, состоящей из указанных полунорм обозначается $\mathcal{E}(\Omega)$. Его подпространство, состоящее из функций, носители которых содержатся в компакте $K \subset \Omega$, обозначается $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

99. Доказать, что на векторном пространстве

$$\left\{ x \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall k, m \in \overline{\mathbb{N}} \quad \sup_{\substack{|\alpha| \leq m \\ t \in \mathbb{R}^n}} (1 + |t|)^k \cdot |\partial^\alpha x(t)| < +\infty \right\}$$

быстро убывающих функций следующие функции являются полунормами

$$p_{\alpha,\beta}(x) := \sup_{t \in \mathbb{R}^n} |t^\alpha \cdot \partial^\beta x(t)|, \quad p'_{\alpha,\beta}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} |t^\alpha \cdot \partial^\beta x(t)| dt, \quad p''_{\alpha,\beta}(x) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |t^\alpha \cdot \partial^\beta x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

а мультинормы

$$\mathfrak{M}_1 = \left\{ p_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{N}}^n \right\}, \quad \mathfrak{M}_2 = \left\{ p'_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{N}}^n \right\}, \quad \mathfrak{M}_3 = \left\{ p''_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{N}}^n \right\}$$

эквивалентны. Это пространство, наделенное топологией, порожденной любой из указанных мультинорм, обозначается $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ или $S(\mathbb{R}^n)$.

100. Доказать, что на векторном пространстве $C_0^\infty(\Omega)$ всех бесконечно дифференцируемых в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функций с компактными носителями функции

$$p_\gamma(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n \cdot \sup_{|\alpha| \leq \gamma_n} \sup_{t \in K_n \setminus K_{n-1}} |\partial^\alpha x(t)|, \quad q_\gamma(x) := \sup_{n \geq 0} \gamma_n \cdot \sup_{|\alpha| \leq \gamma_n} \sup_{t \in \Omega \setminus K_n} |\partial^\alpha x(t)|,$$

где $\gamma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность компактов, аппроксимирующая область Ω , являются полунормами. Доказать, что мультинормы

$$\mathfrak{M} = \left\{ p_\gamma : \gamma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \right\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{N} = \left\{ q_\gamma : \gamma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \right\}$$

на $C_0^\infty(\Omega)$ эквивалентны. Пространство $C_0^\infty(\Omega)$, наделенное топологией, определяемой любой из этих мультинорм, обозначается $\mathcal{D}(\Omega)$.

101. Доказать полноту пространств $\mathcal{E}^m(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}_K^m(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Являются ли они пространствами Фреше? Нормируемы ли они?

102. Доказать, что в каждом из пространств $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ непрерывен оператор дифференцирования $\partial^\alpha : x \mapsto \partial^\alpha x$.

103. Доказать непрерывность и плотность вложений:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}^k(\mathbb{R}^n).$$

104. Пусть функция x принадлежит одному из пространств: $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ или $\mathcal{E}^m(\mathbb{R}^n)$. Сходятся ли в каком-либо из этих пространств последовательности:

$$\frac{1}{n}x(t); \quad \frac{1}{n}x(nt); \quad \frac{1}{n}x\left(\frac{t}{n}\right) \quad (n \in \mathbb{N})?$$

105. Доказать, что пространство $\mathcal{A}(D)$ всех аналитических функций в открытом единичном круге D с топологией компактной сходимости является пространством Фреше, но не нормируемо.

106. Доказать, что если множество $A \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ограничено, то объединение носителей всех функций из A относительно компактно в \mathbb{R}^n .

107. Доказать, что пространства $\mathcal{A}(D)$, $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ являются монтелиевскими, т.е. в каждом из них любое замкнутое ограниченное множество компактно.

108. Доказать, что на векторном пространстве $\mathbb{K}^\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}^n$ следующие функции являются полунормами: $p_\gamma(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n \cdot |x_n|$, $\gamma \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Это пространство считается наделенным мультинормой $\mathfrak{M} = \{p_\gamma : \gamma \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}$.

109. Доказать, что пространства s и \mathbb{K}^∞ являются монтелиевскими.

110. Исследовать на непрерывность отображения:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \mathcal{E}^m(\Omega) \ni x \mapsto \varphi \cdot x \in \mathcal{E}^m(\Omega) \quad (\varphi \in \mathcal{E}^m(\Omega)), \\ 2) \quad & \mathcal{E}^m(\Omega) \times \mathcal{E}^m(\Omega) \ni (x, y) \mapsto x \cdot y \in \mathcal{E}^m(\Omega). \end{aligned}$$

111. Доказать, что для любого топологического векторного пространства Y для непрерывности линейного отображения $A : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow Y$ необходимо и достаточно, чтобы для любого компакта $K \subset \Omega$ было непрерывно отображение $A : \mathcal{D}_K(\Omega) \rightarrow Y$.

112. Доказать, что если $X \in \{\mathcal{E}^m(\mathbb{R}^n), \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}_K^m(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$, то для любого топологического векторного пространства Y справедливо равенство $B(X, Y) = L(X, Y)$.

113. Доказать, что если $X \in \{s, c, c_0, l^p \ (0 < p \leq +\infty), \mathbb{K}^\infty\}$, то для любого топологического векторного пространства Y справедливо равенство $B(X, Y) = L(X, Y)$.

114. Для мультинормированных пространств $X, Y, Z \in \{s, c, c_0, l^p \ (0 < p \leq +\infty), \mathbb{K}^\infty\}$ исследовать на непрерывность следующие (би)линейные отображения:

$$A : X \rightarrow Y, \quad u : X \times Y \rightarrow Z$$

$$\begin{aligned} 1) \quad & A\{x_n\} = (0, x_1, x_2, \dots); & 4) \quad u(x, y) &= \{x_n \cdot y_n\}; \\ 2) \quad & A\{x_n\} = (x_2, x_3, x_4, \dots); & 5) \quad u(x, y) &= \left\{ \sum_{k=1}^n 2^{-k} x_k \cdot y_k \right\}; \\ 3) \quad & A\{x_n\} = \{a_n \cdot x_n\} \quad (\{a_n\} \in s); & 6) \quad u(x, y) &= \left\{ a_n \cdot \sum_{k=1}^n x_k \cdot y_{n-k} \right\} \quad (\{a_n\} \in s). \end{aligned}$$

115. В условиях предыдущей задачи исследовать операторы 1)-3) на компактность.

116. Доказать, что для любого топологического векторного пространства Y любое линейное отображение $A : \mathbb{K}^\infty \rightarrow Y$ непрерывно.

117. Какие из следующих функционалов непрерывны на пространствах $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$1) \delta(x) := x(0); \quad 2) \sum_{k=1}^n a_k \cdot \delta^{(k)}(x);$$

$$3) \text{ V.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t)}{t} dt := \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \right) \frac{x(t)}{t} dt;$$

$$4) \text{ V.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t) - x(0)}{t^2} dt := \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \right) \frac{x(t) - x(0)}{t^2} dt?$$

118. Доказать, что непрерывно отображение

$$F : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni x \mapsto F(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \text{где} \quad F(x)(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{-ist} ds.$$

119. Топологическое векторное пространство называется *борнологическим*, если каждое его подмножество, поглощающее любое ограниченное множество, является окрестностью нуля. Доказать, что каждое полуметризуемое ТВП является борнологическим пространством.

120. Доказать, что если X — борнологическое ТВП, то для любого топологического векторного пространства Y справедливо равенство $B(X, Y) = L(X, Y)$.

121. Замкнутое абсолютно выпуклое поглощающее подмножество ТВП называется *бочкой*. Топологическое векторное пространство называется *бочечным*, если каждая бочка в нем является окрестностью нуля. Доказать, что каждое бэровское и, в частности, каждое полное полуметризуемое ТВП является бочечным пространством.

122. Доказать, что каждое секвенциально полное борнологическое ТВП является бочечным пространством.

3. Нормированные пространства.

123. Доказать, что следующие функции на пространстве $BV[a, b]$ являются нормами, причем эти нормы эквивалентны:

$$\|x\|_1 := |x(a)| + V(x), \quad \|x\|_2 := |x(c)| + V(x), \quad c \in [a, b].$$

Является ли это пространство банаховым?

124. Доказать, что на векторном пространстве $H^\alpha[a, b]$ всех гёльдеровых функций на отрезке $[a, b]$ следующее отображение является нормой:

$$\|x\| := \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \sup_{a \leq t < s \leq b} \frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\alpha}.$$

Пространство $H^\alpha[a, b]$ всегда считается наделенным этой нормой. Является ли это пространство банаховым?

125. Доказать, что на пространстве $C[a, b]$ следующее отображение является нормой: $\|x\|_L := \int_a^b |x(t)| dt$. Как связана эта норма с обычной нормой на $C[a, b]$? Доказать, что $C[a, b]$ с нормой $\|x\|_L$ не является полным.

126. Доказать, что если X — нормированное пространство, X_0 — его подпространство, то фактор-полунорма $\|u\| := \inf_{x \in u} \|x\|_X$ на фактор-пространстве X/X_0 задает фактор-топологию.

127. Доказать, что если X — нормированное пространство, X_0 — его замкнутое подпространство, и фактор-пространство X/X_0 полно, то и пространство X полно.

128. Какие из следующих отображений на пространстве $C^2[a, b]$ являются нормами:

1) $\|x\|_1 := |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a, b]}$;

2) $\|x\|_2 := |x(a)| + \|x''\|_{C[a, b]}$;

3) $\|x\|_3 := |x(a)| + |x'(b)| + \|x''\|_{C[a, b]}$;

4) $\|x\|_4 := |x(a)| + \|x'\|_{C[a, b]} + \|x''\|_{C[a, b]}$?

Как они связаны с обычной нормой на $C^2[a, b]$?

129. Доказать, что каждое нормированное пространство можно пополнить, т.е. существует единственное с точностью до изоморфизма банахово пространство, содержащее данное в качестве плотного подпространства.

130. Привести пример банахова пространства и невозрастающей последовательности его замкнутых, ограниченных и абсолютно выпуклых подмножеств, пересечение которых пусто.

131. В подпространстве $E = \{x \in C[0, 1] : x(0) = 0\}$ пространства $C[0, 1]$ найти множество всех элементов наилучшего приближения к элементу $x_0 \equiv 1$.

132. В пространстве $C[0, 1]$ найти расстояние $\text{dist}(x_0, E)$, если

1) $x_0(t) = t, \quad E = \{x \in C[0, 1] : x(t) \equiv c \in \mathbb{R}\}$;

2) $x_0(t) = t^2, \quad E = \{x \in C[0, 1] : x(t) = at + b, a, b \in \mathbb{R}\}$.

133. В пространстве l^2 найти расстояние $\text{dist}(x_0, E_n)$, если

$$x_0 = (1, 0, \dots, 0), \quad E_n = \{x \in l^2 : \sum_{k=1}^n x_k = 0\}.$$

Существует ли предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x_0, E_n)$? Если да, то чему он равен?

134. В пространстве $L^2(0, 1)$ найти расстояние $\text{dist}(x_0, E)$, если

$$x_0(t) = t^2, \quad E = \{x \in L^2(0, 1) : \int_0^1 x(t) dt = 0\}.$$

135. Для нормированных пространств $X, Y \in \{c, c_0, l^p \ (1 \leq p \leq +\infty)\}$ найти норму оператора $A : X \rightarrow Y$, если

1) $A\{x_n\} = (0, a_1x_1, a_2x_2, \dots)$, 2) $A\{x_n\} = (a_2x_2, a_3x_3, a_4x_4, \dots)$, 3) $A\{x_n\} = \{a_n \cdot x_n\}$

при $a_n \equiv 1, \quad a_n = (\Leftrightarrow 1)^n, \quad a_n = \frac{1}{n}, \quad a_n = \frac{1}{n^2}, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}.$

136. Исследовать на непрерывность отображение $L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R}) \ni (x, y) \mapsto x * y \in L^1(\mathbb{R})$.

137. В случае, когда $X, Y \in \{C[0, 1], C^1[0, 1], L^1(0, 1), L^2(0, 1)\}$, выяснить, будет ли отображение $A : X \rightarrow Y$, определяемое по формуле

1) $Ax(t) = t^2 \cdot x(0); \quad 3) \quad Ax(t) = \int_0^t x(s) ds;$

2) $Ax(t) = x^2(t); \quad 4) \quad Ax(t) = t \cdot \int_0^t x(s) ds,$

определено на X , линейно, непрерывно? Найти нормы тех из операторов, которые непрерывны.

138. Какие из операторов предыдущей задачи компактны?

139. В случае, когда $X, Y \in \{C[0, 1], C^1[0, 1], L^1(0, 1), L^2(0, 1)\}$, выяснить, будет ли отображение $A : X \rightarrow Y$, определяемое по формуле

$$\begin{aligned} 1) \quad Ax(t) &= x(t^2); & 4) \quad Ax(t) &= \int_0^1 \sin \pi(t \Leftrightarrow s) x(s) ds; \\ 2) \quad Ax(t) &= x'(t); & 5) \quad Ax(t) &= \int_0^1 \sin \pi(t + s) x(s) ds; \\ 3) \quad Ax(t) &= t \cdot \int_0^1 x(s) ds; & 6) \quad Ax(t) &= \int_0^t e^{t-s} x(s) ds, \end{aligned}$$

определено на X , линейно, непрерывно? Найти нормы тех из операторов, которые непрерывны.

140. Какие из операторов предыдущей задачи компактны?

141. Доказать, что любой непрерывный линейный функционал f на пространстве \mathbb{K}^n имеет вид $f(x) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$, где $y \in \mathbb{K}^n$, причем $\|f\| = \|y\|$.

142. Доказать, что любой непрерывный линейный функционал f на пространстве c_0 имеет вид $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$, где $y \in l^1$, причем $\|f\| = \|y\|$.

143. Доказать, что любой непрерывный линейный функционал f на пространстве l^p ($1 \leq p < \infty$) имеет вид $f(x) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$, где $y \in l^q$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), причем $\|f\| = \|y\|$.

144. Доказать, что любой непрерывный линейный функционал f на пространстве $L^p(0, 1)$ ($1 \leq p < \infty$) имеет вид $f(x) = \int_0^1 x(s) y(s) ds$, где $y \in L^q(0, 1)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), причем $\|f\| = \|y\|$.

145. Доказать, что любой непрерывный линейный функционал f на пространстве $C[a, b]$ имеет вид $f(x) = \int_0^1 x(s) dy(s)$, где $y \in BV[a, b]$, причем $\|f\| = V(y)$.

146. Доказать, что любой непрерывный линейный функционал f на пространстве s имеет вид $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$, где $y \in \mathbb{K}^{\infty}$.

147. Доказать, что любой непрерывный линейный функционал f на пространстве \mathbb{K}^{∞} имеет вид $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$, где $y \in s$.

148. Существуют ли непрерывные линейные функционалы на пространстве l^p ($0 < p < 1$)? А на пространстве $L^p(0, 1)$ ($0 < p < 1$)?

149. Для пространств $X, Y \in \{c_0, l^p \ (1 \leq p < +\infty)\}$ найти сопряженный к оператору $A : X \rightarrow Y$, если

$$1) \ A\{x_n\} = (0, a_1 x_1, a_2 x_2, \dots), \quad 2) \ A\{x_n\} = (a_2 x_2, a_3 x_3, a_4 x_4, \dots), \quad 3) \ A\{x_n\} = \{a_n \cdot x_n\}.$$

150. Для пространств $X, Y \in \{C[0, 1], L^p(0, 1) \ (1 \leq p < +\infty)\}$, найти сопряженный к оператору $A : X \rightarrow Y$, если

$$\begin{aligned} 1) \quad Ax(t) &= x(t^2); & 4) \quad Ax(t) &= \int_0^1 \sin \pi(t \Leftrightarrow s) x(s) ds; \\ 2) \quad Ax(t) &= x'(t); & 5) \quad Ax(t) &= \int_0^1 \sin \pi(t + s) x(s) ds; \\ 3) \quad Ax(t) &= t \cdot \int_0^1 x(s) ds; & 6) \quad Ax(t) &= \int_0^t e^{t-s} x(s) ds. \end{aligned}$$

151. Исследовать на компактность оператор $A : X \rightarrow Y$, определяемый равенством $Ax(t) = \frac{dx}{dt}$, если

1) $X = C^1[a, b]$, $Y = C[a, b]$; 2) $X = C^2[a, b]$, $Y = C^1[a, b]$; 3) $X = C^2[a, b]$, $Y = C[a, b]$.

152. Доказать компактность оператора вложения $J : C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$, $Jx = x$.

153. Исследовать на компактность оператор вложения $J : l^1 \rightarrow l^2$.

154. Найти резольвенту оператора $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, если

$$\begin{aligned} 1) \quad Ax(t) &= \int_0^t x(s) ds; & 4) \quad Ax(t) &= \int_t^1 x(s) ds; \\ 2) \quad Ax(t) &= \int_0^t sx(s) ds; & 5) \quad Ax(t) &= \int_t^1 sx(s) ds; \\ 3) \quad Ax(t) &= \int_0^t s^2x(s) ds; & 6) \quad Ax(t) &= \int_t^1 s^2x(s) ds. \end{aligned}$$

155. Найти спектр оператора $A : c_0 \rightarrow c_0$, $Ax := (0, x_1, \Leftrightarrow x_2, x_3, \Leftrightarrow x_4, \dots)$.

156. Найти спектр оператора $A : l^2 \rightarrow l^2$, $Ax := (x_2, x_3, x_4, \dots)$.

157. Найти спектральный радиус оператора $A : C[0, a] \rightarrow C[0, a]$, определяемого равенством $Ax(t) = t \cdot x(t)$.

158. Доказать, что в ЛВП каждый выпуклый компакт имеет хотя бы одну крайнюю точку.

159. Найти топологическое сопряженное к пространству c .

160. Доказать, что каждое замкнутое выпуклое подмножество ЛВП слабо замкнуто.

161. Привести пример банахова пространства и его замкнутого подмножества, не являющегося слабо замкнутым.

162. Доказать, что каждое слабо ограниченное подмножество ЛВП ограничено.

163. Является ли пространство $C[0, 1]$ слабо полным?

164. Найти множества крайних точек замкнутых единичных шаров в пространствах l^1 , c_0 , c , l^∞ , $C[a, b]$, $L^1[a, b]$, $L^\infty[a, b]$.

165. Доказать, что пространства l^1 , c_0 , c , l^∞ , $C[a, b]$, $L^1[a, b]$, $L^\infty[a, b]$ не рефлексивны.

166. Доказать, что банахово пространство рефлексивно тогда и только тогда, когда рефлексивно его сопряженное.

167. Доказать, что если X и Y — локально выпуклые пространства, $A \in L(X, Y)$ и направленность $\{x_j\}_{j \in J}$ слабо сходится к x , то направленность $\{Ax_j\}_{j \in J}$ слабо сходится к Ax .

168. Доказать, что если X и Y — нормированные пространства, $A \in \mathcal{K}(X, Y)$ и последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ слабо сходится к x , то $\|Ax_n - Ax\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

169. Доказать, что линейный оператор $Ax(t) = \frac{dx}{dt}$ в пространстве $C[0, 1]$ с областью определения $\text{dom } A := \{x \in C^1[0, 1] : x(0) = 0\}$ замкнут.

170. Доказать, что линейный оператор $Ax(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$ в пространстве $C[0, 1]$ с областью определения $\text{dom } A := \{x \in C^2[0, 1] : x(0) = 0, x(1) = 0\}$ замкнут.

171. Доказать, что если X — бочечное, а Y — локально выпуклое пространства и множество $\mathfrak{A} \subset L(X, Y)$ поточечно ограничено, то для любой окрестности V нуля в Y существует такая окрестность U нуля в X , что $\forall A \in \mathfrak{A} \quad A(U) \subset V$.

172. Доказать, что если X — бочечное, а Y — секвенциально полное локально выпуклое пространства, то пространство $L_s(X, Y)$ секвенциально полно.

173. Доказать, что если X — бочечное, а Y — локально выпуклое пространства и последовательность $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L(X, Y)$ поточечно на X сходится к некоторому отображению A , то $A \in L(X, Y)$.

174. Доказать, что в каждом евклидовом пространстве X справедливы

1) *тождество Аполлония*:

$$\|z \Leftrightarrow x\|^2 + \|z \Leftrightarrow y\|^2 = \frac{1}{2}\|x \Leftrightarrow y\|^2 + 2\|z \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+y)\|^2, \quad x, y, z \in X.$$

2) и *неравенство Птолемея*:

$$\|x \Leftrightarrow u\| \cdot \|y \Leftrightarrow v\| \leq \|x \Leftrightarrow y\| \cdot \|u \Leftrightarrow v\| + \|y \Leftrightarrow u\| \cdot \|x \Leftrightarrow v\|, \quad x, y, u, v \in X.$$

В каком случае неравенство Птолемея превращается в равенство?

175. Доказать, что в каждом евклидовом пространстве X справедливо *тождество параллелограмма*:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad x, y \in X.$$

176. Доказать, что в каждом комплексном евклидовом пространстве X справедливо *поляризационное тождество*:

$$\|x+y\|^2 \Leftrightarrow \|x-y\|^2 = 4 \operatorname{Re}(x, y), \quad x, y \in X.$$

177. Доказать, что если в нормированном пространстве X справедливо тождество параллелограмма, то формула

$$(x, y) := \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 \Leftrightarrow \|x-y\|^2), \quad x, y \in X$$

определяет на X скалярное произведение, порождающее исходную норму в случае, когда X вещественное, а формула

$$(x, y) := \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 \Leftrightarrow \|x-y\|^2) \Leftrightarrow \frac{i}{4}(\|x+iy\|^2 \Leftrightarrow \|x-iy\|^2), \quad x, y \in X$$

определяет на X скалярное произведение, порождающее исходную норму в случае, когда X комплексное.

178. В вещественном векторном пространстве l^2 положим $(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k y_k$, где последовательность $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такова, что $0 < c_k < 1$, $k \in \mathbb{N}$. Будет ли эта билинейная форма скалярным произведением? Если да, то будет ли соответствующее евклидово пространство гильбертовым?

179. Доказать, что подпространство

$$E := \left\{ x \in l^2 : \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0 \right\}$$

всюду плотно в l^2 .

180. В пространстве l^2 найти ортогональное дополнение к подпространству

$$E := \left\{ x \in l^2 : \sum_{k=1}^n x_k = 0 \right\}.$$

181. Доказать, что ортогональное множество в евклидовом пространстве, не содержащее нуля, линейно не зависимо.

182. Доказать, что последовательности функций $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ и

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots$$

в пространстве $L^2(\Leftarrow \pi, \pi)$ являются ортонормированными.

183. Доказать ортогональность в $L^2(0, \pi)$ последовательностей функций

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots \quad \text{и} \quad \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots$$

184. Разложить в ряд Фурье в интервале $(\Leftarrow \pi, \pi)$ функцию $f(x) = x \cos x$.

185. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |\sin x|$.

186. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right|$.

Задание составил доцент кафедры
математического анализа ОмГУ

Е. В. Мельников